Corrigé de l'épreuve de Physique

May 2003

1 Premier Problème : Ordres de grandeurs

1.1 Questions Préliminaires

(1.1.1)

$$E_{gr} \approx \frac{G\mu^2}{a} \tag{1}$$

(1.1.2)

$$E_{em} \approx \frac{e^2}{a} \tag{2}$$

(1.1.3)

$$\frac{E_{em}}{E_{gr}} \approx \frac{e^2}{G\mu^2} \approx 10^{36} \tag{3}$$

1.2 Première Partie : La Planète

(1.2.1) Comme chaque atome interagit avec un nombre fini d'atomes on peut écrire pour l'énergie électromagnétique totale de la planète la relation suivante :

$$U_{em} \approx NE_{em} \tag{4}$$

La propriété de "saturation" de forces électromagnétiques est fondamantale. Ainsi ce phénomène est la cause de l'existences de la vie sous la forme qu'on voit aujourd'hui. Il est très facile de trouver des exemples de manifestations de ce fait dans la vie de tous les jours. Par exemple il est aussi facile de casser un bâton de craie usé que neuf et il est aussi facile de laper une gorgée d'eau dans une flaque que dans un lac.

(1.2.2) L'énergie gravitationnelle d'une sphère est facile à calculer, le calcul nous donne :

$$U_{gr} = \frac{3GM^2}{5R} \tag{5}$$

Ici comme on fait un calcul d'ordre de grandeur on négligera le terme $3/5$ dans la formule ci-dessus et on prendera comme rayon la taille caractéristique de la planète. Ceci nous donne le droit d'écrire :

$$U_{gr} \approx \frac{GM^2}{L} \approx \frac{GN^2\mu^2}{N^{1/3}a} = \frac{GN^{5/3}\mu^2}{a} \tag{6}$$

On pourrait utiliser une autre méthode pour aboutir au même résultat en remarquant qu'il y a $N(N-1)/2$ paires d'atomes qui interagissent et qu'on peut attribuer à chaque paire une énergie d'interaction gravitationnelle de l'ordre de $G\mu^2/L$. Après multiplication on retrouve effectivment le même résultat. **(1.2.3)** Pour que la matière puisse exister en fragments il faut que l'énergie électromagnétique prédomine sur l'énergie gravitationnelle, c'est-à-dire on doit avoir l'inégalité suivante :

$$U_{em} \succ U_{gr} \tag{7}$$

En terme de nombre N d'atomes dans la planète on a :

$$N \prec N_p = (\frac{e^2}{G\mu^2})^{3/2} \tag{8}$$

(1.2.4) Comme on ne considère pas les effets quantiques dans notre raisonnement les seules forces mises en jeu dans la matière sont les forces électromagnétiques et les forces gravitationnelles. Donc les seules énergies constructives de la matière sont les énergies liées à ces forces. Or pour deux atomes on a vu que l'énergie électromagnétique est beaucoup plus importante que l'énergie caractéristique d'interaction gravitationnelle ($\frac{E_{em}}{E_{gr}} \approx 10^{36} \gg 1$). Donc la seule énergie à prendre en compte est l'énergie d'interaction électromagnétique, dans ces conditions on peut écrire que l'énergie d'agitation thermique, qui de l'ordre de kT ne doit pas être supérieure à l'énergie E_{em}, sinon les édifices biologiques tels les molecules organiques seraient instables. En définitif on a :

$$kT \approx E_{em} \tag{9}$$

(1.2.5) Pour que une atmosphère existe il faut que les atomes, qui la constituent ne puissent pas la quitter. En d'autres termes il faut que l'énergie d'agitation thermique soit inférieure au puits gravitationnel qui est de l'ordre de $\frac{GM\mu}{L}$. Ceci se concrétise par la relation suivante :

$$kT \prec \frac{GM\mu}{L} \tag{10}$$

(1.2.6) Des deux dernières relations on tire (équations 9 et 10) :

$$E_{em} \prec \frac{N^{2/3}G\mu^2}{a} \tag{11}$$

En introduisant les notations de plus haut on peut écrire un encadrement pour le nombre N d'atomes d'une planète habitable qui se présente sous la forme suivante :

$$N \succ N_p \tag{12}$$

(1.2.7) D'après les équations (8) et(12) on déduit que le nombre d'atomes d'une planète habitable doit être de l'ordre de N_p, qui est un résultat bouleversant car on trouve que la taille d'une planète suceptible d'abriter la vie doit être d'un ordre de grandeur déterminé. Effectivement si on avait fait un raisonnement moins brutal on aurait bien sûr trouvé une plage de valeurs possibles pour la taille caractéristique de la planète, ce qui est plus acceptable de point de vue physique. Après application numérique on trouve :

$$N_p \approx 10^{54} \tag{13}$$
$$M_p = N_p\mu \approx 10^{27}kg. \tag{14}$$
$$L_p = N_p^{1/3}a \approx 10^8 m. \tag{15}$$

Ces ordres de grandeur sont bien ceux d'une "grosse" planète, intermédiaire entre la Terre et Jupiter. Compte tenu de la brutalité de nos approximations, en particulier du complet "oubli" de la composition atomique de la matière , et de l'incertitude quant aux constantes sans dimension (certes de l'ordre de l'unité selon le Principe numéro Zéro, mais le produit de plusieurs nombres de cet ordre de grandeur peut fort bien lui échapper !),ce résultat est fort satisfaisant.

1.3 Deuxième Partie : L'Animal

(1.3.1) L'énergie de rupture est celle du nombre de liaisons atomique rompues, soit en gros le nombre n' d'atomes dans une section plane du corps. Ce nombre peut être évaluer en divisant l'aire caractéristique d'une telle section, soit l^2, par l'aire du domaine occupé par chaque atome, soit a^2 :

$$n' \approx \frac{l^2}{a^2} \approx n^{2/3} \tag{16}$$

de sorte que l'énergie de rupture s'écrit :

$$E_{rup} \approx n^{2/3}E_{em} \tag{17}$$

(1.3.2) L'énergie de chute, quant à elle, n'est autre que l'énergie potentielle du corps dans le champ de pesanteur de la planète quand il se tient à sa propre hauteur l au-dessus de la surface. Or l'accélération de la pesanteur à la surface de la planète vaut :

$$g \approx \frac{GM}{L^2} \approx N^{1/3}\frac{G\mu}{a^2} \tag{18}$$

L'énergie cinétique acquise lors de la chute s'écrit alors :

$$E_{cin} \approx mgl \approx N^{1/3}n^{4/3}\frac{G\mu^2}{a} \approx N^{1/3}n^{4/3}E_{em} \tag{19}$$

(1.3.3) La condition assurant l'intégrité du corps de l'animal lors d'une chute, soit $E_{cin} \prec E_{rup}$, devient alors :

$$N^{1/3}n^{4/3}E_{gr} \prec n^{2/3}E_{em},$$

ou encore :

$$n^{2/3} \prec N^{-1/3}{N_p}^{2/3}.$$

Il est logique, en effet, que la limite supérieure pour la taille d'un animal soit d'autant plus basse que la taille de la planète est forte, puisque la pesanteur y est d'autant plus intense, et les conséquences d'une chute d'autant plus graves. Mais la taille d'une planète habitée n'est pas quelconque, et le nombre d'atomes y est justement donné par N_p : nous en arrivons ainsi à notre résultat essentiel :

$$n \prec {N_p}^{1/2} \tag{20}$$

(1.3.4) Il existe donc une taille maximale pour la vie animale. Le nombre d'atomes correspondant s'exprime simplement en terme des constantes fondamentales :

$$n_0 \approx (\frac{e^2}{G\mu^2})^{3/4} \tag{21}$$

La masse correspondante est :

$$m_0 \approx \mu(\frac{e^2}{G\mu^2})^{3/4} \tag{22}$$

et la taille :

$$l_0 \approx a(\frac{e^2}{G\mu^2})^{1/4} \tag{23}$$

Les valeurs numériques de ces grandeurs sont alors :

$$n_0 \approx 10^{27}, m_0 \approx 1kg, l_0 \approx 10cm.$$

Ici encore, en égard à la simplicité de nos arguments, ce sont là des ordres de grandeur plus que satisfaisants. Il est clair que des estimations plus raffinées pourraient sans mal induire un facteur 10 à 100 sur l'échelle de la taille.

Il existe naturellement un moyen de dépasser la limitation imposée par le critère de résistance aux chutes-c'est de ne pas tomber ! Ceci peut se faire, pour des animaux terrestres, en retournant à l'eau, et en jouant la poussée d'Archimède contre la gravité de Newton. Aussi ne doit-on pas être surpris que les plus grands et plus lourds animaux ayant jamais existé soient les cétacés géants. Une autre façon de pallier le risque de chutes est de ne pas se déplacer ! Un être vivant fixé (sur notre planète, ce sont les plantes qui sont immobiles, mais ailleurs ?) n'est pas assujetti à la limitation de taille que nous avons mise en évidence-d'où les séquoias...

(1.3.5) Ici on a défini la taille caractéristique des êtres vivants donc c'est aussi celle de l'échelle humaine, on n'est pas surpris de retrouver alors le nombre d'Avogadro (à quelques puissances de 10 près, dues à la fois à la grossièreté de nos approximations-et à sa définition historique particulière via le système CGS : si la mole avait été définie par rapport au kilogramme plutôt qu'au gramme, le nombre d'Avogadro serait de 6.10^{26}) dans n_0. Ainsi, le nombre d'Avogadro, loin d'avoir une valeur numérique arbitraire, liée à une convention arbitraire, est-il en réalité déterminé par les constantes fondamentales de la physique, et plus spécifiquement, par le rapport des intensités des forces électromagnétiques et gravitationnelles.

On peut encore présenter ces résultats d'une façon particulièrement frappante, en rélisant que les grandeurs caractéristiques de l'échelle humaine, selons les estimations obtenues ici, correspondent tout juste à la moyenne géométrique entre les grandeurs atomiques et planétaires. En d'autres termes, et de façon hautement symbolique :

$$Homme = \sqrt{Atome.Plante} \tag{24}$$

2 Deuxiéme Probléme : Temps pour faire couler une casserole

On écrit la loi de Bernoulli pour une ligne de courant passant par A et B (Figure 1).

$$P_A = P_B + \frac{\rho u^2}{2}, \tag{25}$$

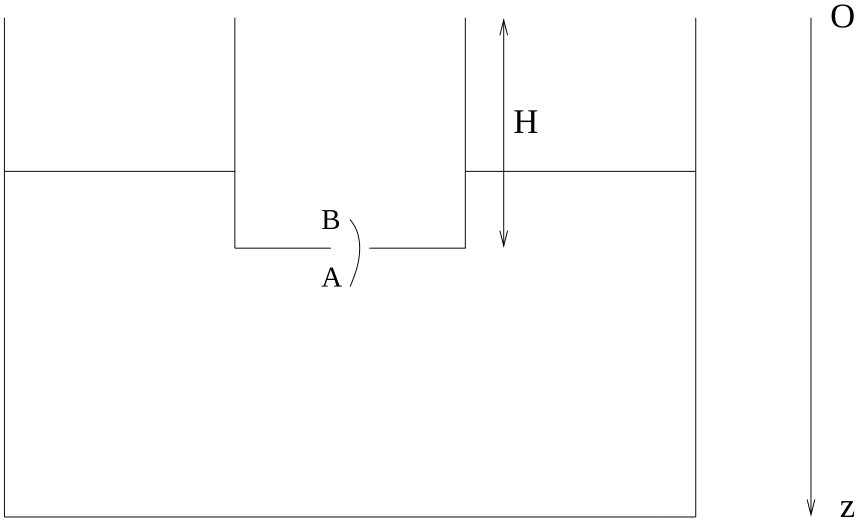

FIG. 1 – Casserole en train de couler

avec u la vitesse de l'écoulement dans le trou (on considère qu'en A le fluide est immobile).

Or, d'après le principe fondamental de la dynamique, le poids de la casserole est équilibré par la presion exercée sur le fond :

$$P_A - P_B = \frac{Mg}{S} \tag{26}$$

D'après (25) et (26)

$$u = \sqrt{\frac{2Mg}{\rho S}}$$

Par ailleurs la continuité de l'écoulement nous fournit une relation entre la vitesse du fluide dans la casserole et sa vitesse dans l'ouverture au fond, i.e. :

$$Sv = su \tag{27}$$

Donc :

$$\boxed{v = \frac{s}{S}\sqrt{\frac{2Mg}{\rho S}} = \sqrt{\frac{2Mgs^2}{\rho S^3}}} \tag{28}$$

Donc la casserole coule à vitesse constante et le temps qu'elle va mettre pour couler est indubitablement :

$$\boxed{\tau = \frac{H}{v} = H\sqrt{\frac{\rho S^3}{2Mgs^2}}} \tag{29}$$

Aller plus loin :

En fait quand on a écrit le PFD (principe fondamental de la dynamique) on a omis le terme d'accélération qui quand il est pris en compte modifie un peu la solution finale (29). Ici on va donner une solution du problème dans ce cas, qui sort largement du programme de Mathématiques et Physique enseignées dans le lycée. Le raisonnement qui va suivre n'était pas du tout demandée aux candidats et toute remarque dans cette direction aurait été la bienvenue et plus que fortement recompensée.

PDF pour la casserole :

$$-P_B S + P_A S + Mg = M\frac{dv}{dt}$$

et d'après (25) et (27) on aboutit à l'équation différentielle :

$$\rho\frac{v^2}{2}\frac{S^2}{s^2} + \frac{Mg}{S} = \frac{M}{S}\frac{dv}{dt}$$

qu'on résout par intégration :

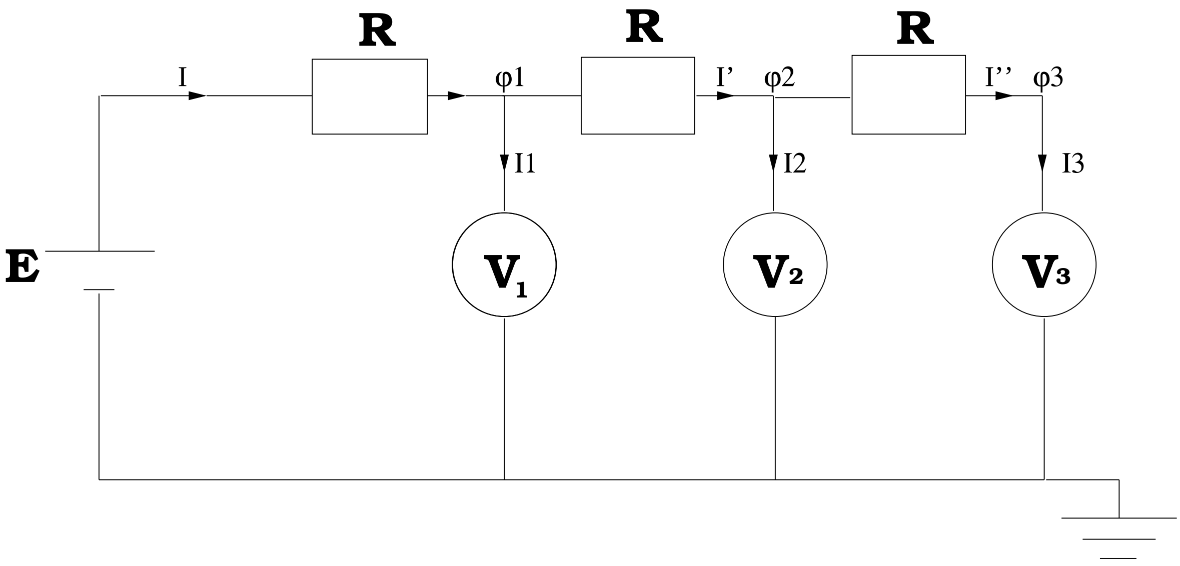

FIG. 2 – Montage électrique

$$\int \frac{dv}{1+\beta^2 v^2} = \int g dt$$

avec $\beta^2 = \frac{\rho S^3}{2Mgs^2}$. Cette équation admet comme solution

$$v = \frac{tan\beta gt}{\beta}$$

et donc le temps nécessaire pour faire couler la casserole on obtient en intégrant la vitesse :

$$z = -\frac{1}{\beta^2 g} ln|cos\beta gt| + constante$$

à $t = 0$ $z = 0$ donc la constante vaut 0. τ vérifie l'équation suivante :

$$H = -\frac{1}{\beta^2 g} ln|cos\beta g\tau|$$

donc au final on trouve l'expression du temps recherchée en fonction de l'hauteur de la casserole H et le paramètre .

$$\tau = \frac{1}{\beta g} Arccos e^{-H\beta^2 g}$$

3 Trosiéme Probléme : Trois voltmétres

On considère le montage ci-dessus (Figure 2) avec φ_1, φ_2 et φ_3 les potentiels des noeuds correspondants. D'après la loi d'Ohm on a :

$$\begin{cases} \frac{\varphi_1}{R_v} = I_1 \\ \frac{\varphi_2}{R_v} = I_2 \\ \frac{\varphi_3}{R_3} = I_3 \end{cases} \tag{30}$$

et

$$\begin{cases} \varphi_1 - \varphi_2 = I'R \\ \varphi_2 - \varphi_3 = I''R \\ E - \varphi_1 = IR \end{cases} \tag{31}$$

Par ailleurs la loi des noeuds nous fournit les relation suivantes :

$$\begin{cases} I = I_1 + I' \\ I' = I_2 + I'' \\ I'' = I_3 \end{cases} \tag{32}$$

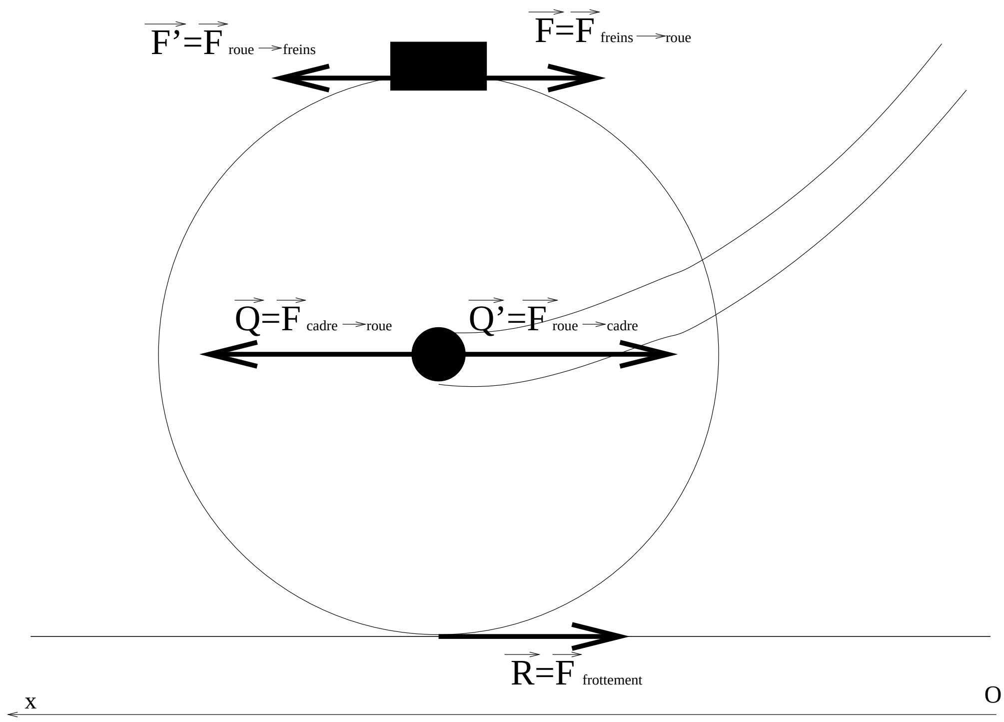

FIG. 3 – Figure des forces appliquées sur la roue et sur le cadre

On remplace les courants dans (32) par leurs expressions en fonction des potentiels tirées de (30) et (31).

On aboutit au système final :

$$\begin{cases} \frac{E-\varphi_1}{R} = \frac{\varphi_1}{R_v} + \frac{\varphi_1-\varphi_2}{R} \\ \frac{\varphi_1-\varphi_2}{R} = \frac{\varphi_2}{R_v} + \frac{\varphi_2-\varphi_3}{R} \\ \frac{\varphi_2-\varphi_3}{R} = \frac{\varphi_3}{R_v} \end{cases} \quad (33)$$

Avec $\varphi_1 = V_1$ et $\varphi_2 = V_2$. Donc on a un système de trois équations avec trois inconnus E, φ_3 et $\frac{R}{R_v}$.

En le résolvant on trouve :

$$\begin{cases} V_3 = \varphi_3 = 20V \\ E = 260V \\ \frac{R}{R_v} = 1 \end{cases} \quad (34)$$

4 Quatriéme Probléme : Zazie fait du vélo

1)

La condition de roulement sans glissement s'écrit :

$$a = \varepsilon r, \quad (35)$$

avec ε l'accélération angulaire de la roue , a son accélération et r le rayon de la roue.

2) On écrit l'équation de mouvement de la roue (voir figure 3) :

$$\begin{cases} ma = -F + Q - R \\ I\varepsilon = Rr - Fr, \end{cases} \quad (36)$$

où $I = mr^2$. Et l'équation de mouvement du cadre :

$$Ma = F' - Q' \quad (37)$$

D'après le troisième principe de Newton on peut raisonnablement écrire que $F = F'$ et $Q = Q'$.

Avec l'aide de **1)** on résout le système d'équations ainsi obtenu. On trouve au final :

$$\begin{cases} Q = 2R \\ a = -\frac{R}{M+m} \\ F = \frac{M+2m}{M+m} R > R \end{cases} \quad (38)$$

3)

Quand on serre les freins l'accélération acquise par le vélo est dirigée ver l'arrière. Il faut serrer fort : d'après **1)** pour que le vélo commence à s'arrêter la force F qui lui est appliquée de la part des freins doit être supérieure à la force de frottement entre la roue et le sol R qui est d'autre part bornée supérieurement par la quantité $\frac{M+m}{2}g$. Donc le vélo s'arrête. Zazie a eu tort dans son raisonnement car elle a consideré le système $Zazie + vlo$ comme fermé alors qu'il ne l'est pas (Force de frottement).